

PROGRAMA DE CURSO

Nombre del curso (en castellano y en inglés)			
FUNDAMENTOS Y ESTRUCTURAS DE LA MATEMÁTICA FOUNDATIONS AND STRUCTURES OF MATHEMATICS			
Escuela	Carrera (s)		Código
Educación	PEM		PEM4002
Semestre	Tipo de actividad curricular		
8	Obligatoria		
Prerrequisitos		Correquisitos	
PEM2102 PEM3001		No tiene	
Créditos SCT	Total horas a la semana	Horas de cátedra, seminarios, laboratorio, etc.	Horas de trabajo no presencial a la semana
4	3	Cátedra: 3 hrs Ayudantía: 1.5 hrs	2.5
Ámbito	Competencias a las que tributa el curso	Subcompetencias	
Enseñanza y aprendizaje de la matemática	2.1. Aplicar el ciclo de modelamiento matemático para abordar problemas en diversos contextos. 2.2. Disponer de conocimientos matemáticos sólidos y relacionarlos entre sí para abordar la enseñanza de la matemática.	2.1.4. Usar lenguaje matemático preciso y argumentar con distintos grados de formalidad matemática la validez de propiedades y procedimientos. 2.1.6. Comprender, interpretar y manipular expresiones simbólicas, algoritmos, propiedades y construcciones matemáticas en un contexto regido por definiciones, convenciones, sistemas formales y reglas matemáticas. 2.2.1. Conocer y manejar las estructuras, elementos y métodos mediante los cuales se desarrolla la matemática. 2.2.2. Conocer distintos problemas que han motivado el desarrollo de la matemática y que se relacionan con aspectos claves de la matemática escolar. 2.2.4. Comprender y representar los sistemas numéricos, sus significados, operatorias y las relaciones entre ellos.	
Propósito general del curso			
Este curso está ubicado en el octavo semestre de la carrera, cuando el estudiante ha desarrollado madurez conceptual en matemática y la capacidad de demostrar, y tiene como objetivo profundizar en el conocimiento matemático a partir del análisis de contenidos, definiciones y la lógica de ideas que subyacen y justifican el trabajo matemático; así como del estudio de conceptos y métodos centrales de la matemática abstracta y las teorías y fundamentos de la matemática que los sostienen. Una parte importante del trabajo, lecturas y tareas del ramo se organiza en torno al estudio de teoremas, proposiciones, corolarios, etc.; y sus demostraciones.			

Resultados de Aprendizaje (RA)	
1.	Evidencia capacidad de argumentación frente a problemas propios de álgebra abstracta, manipulando las estructuras algebraicas clásicas y demostrando sus principales propiedades.
2.	Fundamenta la construcción de los sistemas numéricos N , Z , Q y R mediante herramientas propias de la teoría de conjuntos y las estructuras algebraicas.
3.	Diseña estrategias de enseñanza-aprendizaje de los objetos de las estructuras algebraicas a nivel escolar, elaborando propuestas didácticas que den respuestas a las necesidades del currículum nacional.

Número	RA al que contribuye la Unidad	Nombre de la Unidad	Duración en semanas
1	1, 2, 3	Fundamentos de la teoría de conjuntos	1
Contenidos		Indicadores de logro	
Teoría axiomática de conjuntos y reglas lógicas.		- Determina el valor de verdad de proposiciones y puede expresar su negación. - Reconoce cuando una proposición matemática es consecuencia de otra. - Comprende definiciones de objetos matemáticos usuales que involucran el uso de cuantificadores.	

Número	RA al que contribuye la Unidad	Nombre de la Unidad	Duración en semanas
2	1, 3	Introducción a las estructuras algebraicas	5.5
Contenidos		Indicadores de logro	
- Definiciones y operaciones básicas: conjunto, subconjunto, conjunto vacío, complemento, unión, intersección, etc. - Productos cartesianos: relaciones, funciones, relaciones de orden y equivalencia. - Orden en conjuntos numéricos y axiomas de Peano. - Cardinalidad y numerabilidad. - Algoritmo de Euclides.		- Conoce los problemas que motivaron el estudio de estructuras algebraicas. - Reflexiona acerca de propiedades que involucran inclusión, igualdad, unión, intersección, complemento, diferencia, potencia y producto cartesiano de conjuntos. - Analiza las definiciones conceptuales de relación y función, y las diferencia. - Reconoce relaciones de equivalencia y determina sus clases. - Conoce la noción de relación de orden y diferentes tipos de orden tales como orden total, orden denso y buen orden. - Comprende la definición de N a partir de los axiomas de Peano, y comprende la relación entre estos y la aritmética elemental.	

▪ Máximo común divisor y divisibilidad. ▪ Teorema Fundamental de la aritmética. ▪ Congruencias.	· Comprende la noción de cardinalidad de conjuntos, y la evolución del concepto de igualdad de cardinales y de infinito en Matemática. · Comprende el Principio de Inducción Matemática y lo utiliza para demostrar propiedades que involucran números naturales. Reconoce errores en el uso de este principio y demuestra equivalencias en la presentación del principio. · Utiliza el algoritmo de la división, el algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout para demostrar resultados que involucren factorización, el cálculo de máximo común divisor (mcd) y de mínimo común múltiplo (mcm). · Utiliza el teorema fundamental de la aritmética para demostrar propiedades. · Utiliza reglas de divisibilidad para 2; 3; 4; 5; 6; 9; y es capaz de justificarlas. · Define la relación de congruencia y calcula sus clases de equivalencia para comprender $\mathbb{Z}_n$. · Describe y analiza algoritmos relacionados con problemas matemáticos de nivel escolar: Reglas de divisibilidad, métodos para calcular mcd y mcm, entre otros. · Analiza los contenidos del currículo relativos a los tópicos de la unidad. · Elabora actividades para desarrollar habilidades en sus estudiantes relativas a tópicos relativos a la unidad.
---	--

Número	RA al que contribuye la Unidad	Nombre de la Unidad	Duración en semanas
3	1, 3	Grupos	4.5
Contenidos		Indicadores de logro	
▪ Grupos: Primeras definiciones y propiedades. ▪ Grupos en la naturaleza: grupo de congruencias, grupo de biyecciones, grupo de Matrices, grupos ligados a configuraciones geométricas planas. ▪ Subgrupos. ▪ Grupos cíclicos y teorema de Lagrange. ▪ Subgrupos normales y grupo cociente ▪ Homomorfismo de grupos y Primer teorema de isomorfía.		· Conoce y opera elementos de los grupos de congruencias, de biyecciones, de permutaciones, de matrices, de Klein, de rotaciones de un polígono regular, de simetrías de un polígono regular, del cubo y del tetraedro regular. · Demuestra propiedades de los grupos cíclicos. · Comprende el teorema de Lagrange y lo utiliza para demostrar resultados aritméticos. · Determina grupos cocientes a partir de la definición de relaciones de equivalencia respecto a un subgrupo. · Reconoce cuando dos grupos son isomorfos. · Utiliza el primer teorema del isomorfismo para grupos. · Analiza los contenidos del currículo relativos a los tópicos de grupos. · Elabora actividades para desarrollar habilidades en sus estudiantes relativas a tópicos relativos a grupos.	

Número	RA al que contribuye la Unidad	Nombre de la Unidad	Duración en semanas
4	1, 3	Anillos y Cuerpos	2.5
Contenidos		Indicadores de logro	
- Anillos y cuerpos: primeras definiciones y ejemplos. - Subanillos e ideales. - Homomorfismo de anillos.		- Identifica las propiedades que satisfacen los elementos de un conjunto dotado de dos operaciones binarias, justificando la presencia de las estructuras algebraicas de anillo y de cuerpo. - Diferencia las estructuras de anillo y cuerpo. - Determina la existencia de divisores de cero en un anillo. - Reconoce la existencia de subanillos e ideales en un anillo. - Demuestra propiedades de funciones polinomiales utilizando el resultado que todo polinomio de grado n sobre un cuerpo tiene a lo sumo n raíces. - Conoce el desarrollo histórico de la solución de ecuaciones, respecto a las técnicas de solución y respecto al conjunto solución, y explica los avances matemáticos en ese desarrollo. - Analiza los contenidos del currículo relativos a los tópicos de anillos y cuerpos. - Elabora actividades para desarrollar habilidades en sus estudiantes relativas a tópicos relativos a anillos y cuerpos.	

Número	RA al que contribuye la Unidad	Nombre de la Unidad	Duración en semanas
5	1, 2, 3	Construcción de los sistemas numéricos	1.5
Contenidos		Indicadores de logro	
Construcción de los sistemas numéricos.		- Comprende construcciones de $\mathbb{Z}$ a partir $\mathbb{N}$ y de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$. - Conoce la construcción de $\mathbb{R}$ vía cortaduras de Dedekind y su presentación axiomática. - Comprende que $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son únicos salvo isomorfismo.	

Metodologías	Requisitos de Aprobación y Evaluaciones del Curso
- Clases expositivas-dialogadas. - Elaboración de reportes matemático-didácticos respecto a temas asignados. (Ver Anexo 1) - Elaboración de proyecto final de transposición didáctica en estructuras algebraicas. (Ver Anexo 2)	- El aprendizaje del estudiante será evaluado mediante controles, reportes y un proyecto final. - Las ponderaciones de las actividades son dadas por: - Promedio de 2 pruebas (PP): 50% (25% cu) - Promedio de 2 reportes (PR): 25% (12,5% cu) - Proyecto final (PF): 25% - La nota de presentación (NP) a examen será calculada por: $NP = 0.5PP + 0.25PR + 0.25PF$ - El estudiante se eximirá de rendir examen si su $NP \geq 6$. - La nota final (NF) será calculada como: - Estudiante eximido: $NF = NP$ - Estudiante no eximido: $NF = 0.7NP + 0.3NE$ - donde NE corresponde a la nota obtenida en el examen. - Se exige una asistencia mínima a cátedra del 75% (a excepción de los alumnos con nota de presentación a examen superior a 6,0). - Los alumnos con asistencia a cátedra superior al 50% e inferior a 75% deben rendir un examen recuperativo y obtener al menos un 5,0 para aprobar el curso. - Los alumnos cuya nota final (post examen) sea 3,7, 3,8 o 3,9 pueden rendir un examen recuperativo. Este examen recuperativo será similar al primer examen en términos de cobertura curricular, dificultad y duración, y su nota reemplazará (en caso de ser superior) la nota del primer examen para el cálculo de la nota final del curso.

Bibliografía Fundamental	
- Dorronsoro, J., & Hernández, E. (1996). <i>Números, grupos y anillos</i> (No. 512.7 D6). - Lewin R. (2011). <i>La teoría de conjuntos y los fundamentos de la matemática</i>. Santiago, Chile: J.C. Sáez. - Lewin R. (2011). <i>Introducción al Álgebra</i>. Santiago, Chile: J.C. Sáez. - Labra & Suazo (2011). <i>Elementos de la teoría de cuerpos</i>. Santiago, Chile: J.C.Sáez.	
Bibliografía Complementaria	
- Fraleigh, J. B. (2003). <i>A first course in abstract algebra</i>. Pearson Education India. - Herstein, I. N. (1990). <i>Abstract algebra</i>. - Gallian, J. A. (2016). <i>Contemporary Abstract Algebra</i>. Cengage Learning.	
Fecha última revisión:	2020-2
Elaborador por:	Rodrigo Quezada Aguayo
Programa visado por:	

ANEXO 1: DESCRIPCIÓN DE REPORTES MATEMÁTICO-DIDÁCTICOS

(Actividad individual)

Entenderemos por reporte a un informe en el que el estudiante aborde los tópicos matemáticos relacionados con la temática del reporte, abordando las siguientes perspectivas:

- Una **perspectiva matemática teórica** donde se desarrollen aspectos teóricos de los objetos matemáticos vinculados al tema del reporte, definiendo conceptos y demostrando sus principales teoremas y/o propiedades.
- Una **perspectiva curricular** en el que se presente una revisión bibliográfica de la presencia (implícita o explícita) de los objetos matemáticos, subyacentes al tema del reporte, en el curriculum escolar chileno, explicando el contexto pedagógico en como estos se incluyen y abordan.
- Una **perspectiva reflexiva** en el que realicen un análisis relacionando las perspectivas matemática y curricular, donde el estudiante en un rol de docente (utilizando sus experiencias de prácticas de aula) argumente la factibilidad de implementar exitosamente las propuestas conceptuales incluidas en el curriculum nacional.

Adicionalmente, se espera que el estudiante reflexione acerca de las potencialidades de los objetos matemáticos relacionados con el tema del reporte para favorecer al desarrollo pensamiento lógico-deductivo y de las capacidades de generalización y abstracción, mostrando algunas ideas que su parecer serían efectivas y/o innovadoras para llevar estas temáticas al aula.

Requerimientos técnicos:

- El reporte debe contar con al menos 5 planas de desarrollo para la perspectiva teórica matemática, al menos 2 planas de revisión curricular, y al menos 3 planas de desarrollo de la perspectiva reflexiva.
- Debe ser desarrollado en hoja tamaño carta, letra tipo calibri tamaño 12, e interlineado de 1.15.
- El reporte debe contar con título, autor, introducción al tema a tratar, cuerpo (análisis según perspectivas), conclusión y bibliografía (Al menos 5 referencias).

ANEXO 2: DESCRIPCIÓN DE PROYECTO FINAL

(Actividad individual o en parejas)

Los estudiantes seleccionarán alguno de los objetos matemáticos tratados en el curso y elaborarán un proyecto de *transposición didáctica*¹ de dicho tópico, considerando la elaboración de una clase para estudiantes de enseñanza básica o media, pertinente al curriculum nacional. El tema elegido deberá ser discutido con el profesor y aprobado para su ejecución.

El proyecto de transposición didáctica deberá enmarcarse en la planificación de una clase o taller, sin limitante temporal, la cual deberá ser sustentada en una o mas teorías de la didáctica de la matemática.

El proyecto debe incluir:

1. **Informe en formato artículo**, incluyendo: título, autores, abstract, introducción, cuerpo, discusión y bibliografía, satisfaciendo los siguientes requerimientos:
 - a) Deberá escoger un título que represente la naturaleza del trabajo realizado.
Por ejemplo: Una propuesta didáctica para la enseñanza de funciones en un curso de primer año medio bajo el marco de la teoría de representaciones semióticas de Duval.
 - b) El cuerpo del artículo deberá incluir al menos las siguientes secciones:
 - **Antecedentes del objeto matemático:** Revisión bibliográfica respecto del objeto matemático a desarrollar, incluyendo antecedentes epistemológicos y teoría matemática: conceptos y propiedades.
 - **Antecedentes de la(s) teoría(s) didáctica(s):** Realizar una revisión bibliográfica de la o las teorías didácticas que sustentarán su proyecto, describiendo los principales aspectos de ésta y argumentando las razones de su elección.
 - **Presentación de las actividades de la clase:** Presentar detalladamente las actividades que ejecutará y los detalles técnicos necesarios para el buen desarrollo de ésta.
 - **Presentar un análisis a priori de la actividad:** Desarrollar un análisis pedagógico/didáctico previo a la ejecución de la actividad, reflexionando acerca de las situaciones e interacciones esperadas, los errores frecuentes que presentan escolares al abordar el objeto, los conflictos u obstáculos epistemológicos que pudiesen darse a lugar durante el desarrollo de la actividad, las improvisaciones previstas (cartas bajo la manga) ante situaciones emergentes en la situación de aprendizaje, que desvíen el objetivo de la actividad, que generen nuevas oportunidades de aprendizaje o que puedan impedir la ejecución de lo planificado. Puede incluir todos los aspectos que considere necesarios de mencionar.
 - c) En la discusión del artículo deberá reflexionar acerca de las fortalezas y debilidades de su propuesta, argumentando el aporte que ésta puede significar para la educación matemática. Incluir también las posibles extensiones que podría tener su trabajo, identificando posibles oportunidades de investigación e innovación.
2. **Planificación de la clase:** El artículo debe incluir como anexo una plantilla de planificación de clase (en el formato que más le acomode), donde incluya los objetivos y aprendizajes esperados de la actividad, así como otros aspectos relevantes de conocer para la buena comprensión de ésta. Debe incluir detalladamente las etapas de inicio, desarrollo y cierre.
3. **Cápsula de video:** Deberá(n) incluir una cápsula de video de 20 minutos en la que presente(n) su proyecto: el tema y la teoría didáctica escogidos junto a un breve resumen de estos, la presentación de actividad y aspectos relevantes de su análisis a priori. Finalizar la cápsula indicando las fortalezas, debilidades y oportunidades que otorga su proyecto.

¹ La **Transposición didáctica** es el proceso por el cual se modifica un contenido de saber para adaptarlo a su enseñanza. De esta manera, el *saber sabio* es transformado en *saber enseñado*, adecuado al nivel del estudiante. (Chevallard Yves)

Se sugiere a los estudiantes comenzar el trabajo de investigación final a mitad del semestre, realizando un proceso de revisión y análisis curricular.

ANEXO 3: SYLLABUS

SEM	SES	TEMAS	EVALUACIONES
1	1	Introducción: problemas que motivaron el estudio de estructuras algebraicas y reflexión acerca de su presencia en el curriculum (Problema de duplicación del cubo y trisección del ángulo)	
	2	Definiciones y operaciones básicas: conjunto, subconjunto, conjunto vacío, complemento, unión, intersección, etc.	
2	3	Productos cartesianos: Relaciones y funciones	
	4	Relaciones de equivalencia. Clases de equivalencia y conjunto cociente.	
3	5	Relaciones de orden. Orden en conjuntos numéricos y axiomas de Peano.	
	6	Cardinalidad y numerabilidad.	
4	7	Divisibilidad y algoritmo de la división de Euclides.	Reporte 1: Fundamentos de la matemática: Relaciones y teoría de los números.
	8	Máximo común divisor y propiedades relativas.	
5	9	Números primos y Teorema Fundamental de la aritmética.	
	10	Congruencias y su uso para el cálculo de reglas de divisibilidad por 9,3 y 7.	
6	11	Actividad de aplicación: Algoritmos en enseñanza escolar.	Prueba 1: Teoría de conjuntos, relaciones, y teoría de los números.
	12	Grupos: Primeras definiciones y propiedades. Tablas de operaciones.	
7	13	Grupos en la naturaleza: grupos de congruencias, grupos de biyecciones, grupos de permutaciones, grupos de Matrices.	
	14	Grupos en la naturaleza: grupo de Klein, grupos ligados a configuraciones geométricas planas y del espacio.	
8	15	Actividad de aplicación: Tablas de operaciones y sus propiedades de grupo a nivel escolar.	Reporte 2: Grupos
	16	Subgrupos, retículos, grupos cíclicos y orden.	
9	17	Relaciones de equivalencia a partir de subgrupos. Teorema de Lagrange y aplicación a subgrupos de orden primo.	
	18	Subgrupos normales y grupo cociente.	
10	19	Homomorfismo de grupos y primer teorema de isomorfía.	Prueba 2: Grupos, Subgrupos y propiedades de grupos
	20	Actividad de aplicación: Transformaciones por rotación y homotecias en R^2	

11	21	Anillos y cuerpos: primeras definiciones y ejemplos.	
	22	Tipos de anillos. Subanillos e ideales.	
12	23	Homomorfismo de anillos.	Primera entrega Proyecto
	24	Cuerpo de fracciones y aplicación a la solución de ecuaciones que involucran multiplicación.	
13	25	Actividad de aplicación: Anillos de polinomios y cálculo de sus raíces.	Prueba 3: Anillos
	26	Teoría axiomática de conjuntos y reglas lógicas: Parte 1	
14	27	Teoría axiomática de conjuntos y reglas lógicas: Parte 2	
	28	Construcción de los sistemas numéricos: Parte 1	
15	29	Construcción de los sistemas numéricos: Parte 2	Entrega de Proyecto final
	30	Cierre de curso.	